BDA002 Pružnost a pevnost

přednáška 4 (v.23/24.1)

Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2023/2024

Obsah

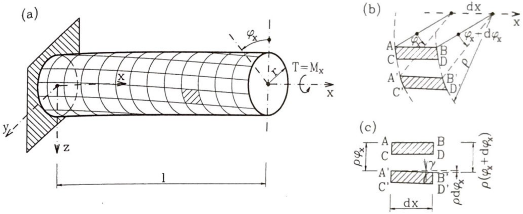
1. Kroucení
   - masivní kruhové průřezy
   - masivní obecné (obdélníkové) průřezy
   - tenkostěnné otevřené průřezy
   - tenkostěnné uzavřené průřezy

- uvažujeme prut namáhaný **prostým kroucením**, kdy
- nenulový je pouze kroutící moment $M_x \neq 0$

Předpoklady

- osa prutu je po deformaci přímá
- průřezy zůstanou rovinné po deformaci a nevzdalují se
- jednotlivé průřezy se otáčí jako tuhé celky

$\rightarrow$ z uvedených předpokladů vyplývá, že nevznikají osové deformace a normálová napětí $\sigma_x = 0$



Obr. 1: Prosté kroucení na kruhovém průřezu

- na základě zkosení elementární plošky na obr. 1 a s pomocí statické ekvivalence krouticího momentu a tečného napětí se získá vztah

Symková napětí

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho,$$

kde ρ je vzdálenost od středu kruhu, I_p je polární moment setrvačnosti[1], který je pro kruhové průřezy roven **momentu tuhosti v kroucení** I_t. Pro **maximální** tečná napětí platí vztah

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_t}r,$$

kde r je poloměr průřezu.

[1] Pro kruh: $I_t = I_p = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{32}d^4$. Pro mezikruží: $I_t = I_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_s^4)$

- pootočení krouceného prutu φ_x se získá řešením integrálu $\varphi_x(x) = \int \frac{M_x}{GI_t} \mathrm{d}x + C$

Pootočení od kroucení ($I_t = \text{konst.},\ \varphi_x(0) = 0$)

$$\varphi_x(x) = \frac{M_x}{GI_t} x$$

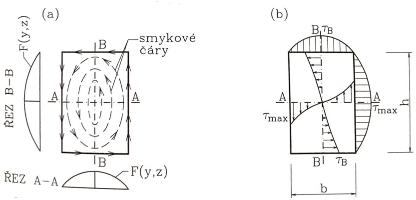
Pro vzájemné pootočení konců prutu pak platí

$$\varphi_l = \frac{M_x l}{GI_t}$$

Sestává-li prut z úseků s různými průřezy pak platí

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xi} l_i}{G_i I_{ti}}$$

- neplatí předpoklad o zachování rovinnosti průřezů, dochází k jejich tzv. **deplanaci**
  - pokud není deplanaci bráněno (např. vnějšími vazbami) $\rightarrow$ **volné kroucení**
  - je-li deplanaci bráněno, vznikají $\sigma_x \neq 0 \rightarrow$ **vázané kroucení**
- zatížení vyvozuje kroucení k ose spojující středy smyku (u masivních průřezů lze zanedbat, u tenkostěnných **nikoliv**)



Obr. 2: Prosté kroucení na obdélníkovém průřezu

Předpoklady

- příčný tvar průřezů se nemění a každý se pootáčí jako tuhý celek
- $\sigma_x = 0$, vzniká ve všech průřezech shodná deplanace

- napětí se odvozují z rovnic pro prostorovou napjatost. Tečná napětí se určují z tzv. *Prandtlovy* funkce $F(y, z)$

Smyková napětí

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

Maximální napětí se určí pomocí **průřezového modulu v kroucení** W_t $[\mathrm{m}^3, \mathrm{mm}^3]$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_t}$$

Pro obdélníkový průřez o stranách b, h kde $b < h$ platí

$$I_t = \alpha b^3 h, \quad W_t = \beta b^2 h$$

Masivní obecné průřezy: součinitele pro výpočet kroucení prutů obdélníkového průřezu

h/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,1406	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3	5	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	0,333
β	0,240	0,243	0,246	0,258	0,267	0,292	0,312	0,333

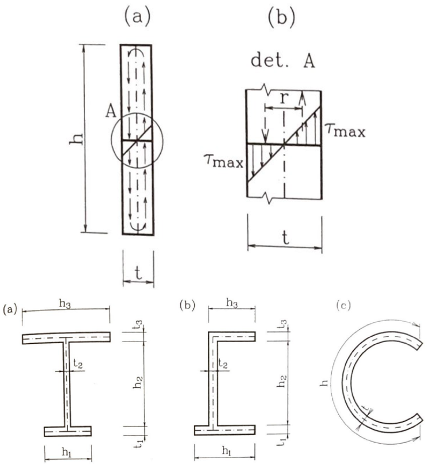
Obr. 3: Součinitele pro výpočet kroucení prutů obdélníkového průřezu

- dílčí části mají obvykle obdélníkový průřez, kde

$$t << h$$

- u otevřených tenkostěnných průřezů uvažujeme, že dílčí části jsou velmi protáhlé

$$\frac{h}{b} = \frac{h}{t} = \infty$$



Obr. 4: Kroucení tenkostěnných otevřených průřezů

Smyková napětí

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_{t,min}},$$

kde

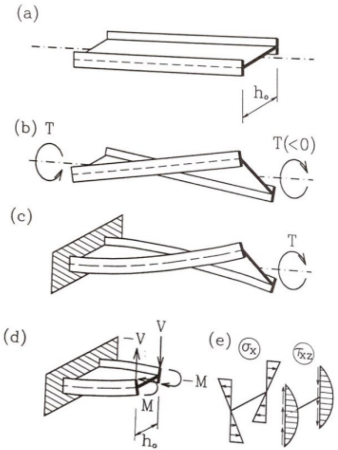
$$W_{t,min} = \frac{I_t}{t_{max}}$$

Moment tuhosti v kroucení se určí pomocí vztahu

$$I_t = \eta \sum_1^n I_{ti} = \frac{\eta}{3} \sum_1^n t_i^3 h_i,$$

kde η je součinitel korigující skutečný poměr t/h, zaoblení rohů u válcovaných průřezů atp.

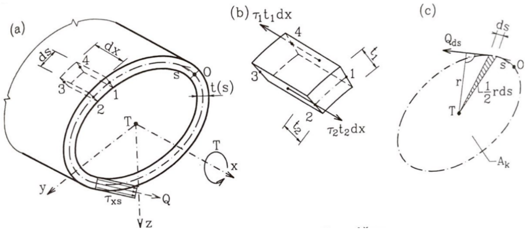
- otevřené tenkostěnné průřezy mají obecně malou tuhost v kroucení
- u otevřených tenkostěnných průřezů nelze zanedbat **vázané kroucení**
- při **volném kroucení** deplanace volně proběhne po délce prutu
- při **vázaném kroucení** je deplanaci bráněno
  - → vznikají normálová napětí σ_x
  - → v průřezech vznikají dílčí ohybové momenty, tvořící rovnovážnou soustavu tzv. **bimoment** B $[\mathrm{kNm}^2]$
  - → obecně se na přenesení účinku kroucení podílí jak volné, tak vázané kroucení a dílčí posouvající síly způsobují vznik smykových napětí, která se sčítají se smykem od volného kroucení (viz obr. 5)



Obr. 5: Volné a vázané kroucení: I průřez

- je-li tloušťka t relativně velmi malá, lze přibližně předpokládat, že smyková napětí jsou konstantní po tloušťce a mají směr tečný k obrysu
- **smykový tok** je konstantní podél celé uzavřené střednice s
- z rovnováhy na diferenciálním elementu stěny průřezu a z integrace kroutících momentů po uzavřené střednici (křivkový integrál) lze odvodit vztah pro výpočet napětí

$$\tau_{xs} = \tau_{xs}(s) = \frac{M_x}{2A_k t(s)}$$



Obr. 6: Kroucení tenkostěnných uzavřených průřezů

Smyková napětí

Maximální smyková napětí vznikají v místě, kde $t(s) = t_{min}$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_t},$$

kde

$$W_t = 2A_k t_{min}$$

je průřezový modul v kroucení a ozn. se jako *Bredtův* vzorec, ve kterém je A_k plocha uzavřená střednicí průřezu. Vztah pro tzv. *Bredtovu* tuhost v kroucení pro průřezy s dílčími částmi o konst. tloušťce má tvar

$$I_t = \frac{4A_k^2}{\sum_1^n \frac{h_i}{t_i}}$$

Použitá literatura

ŠMIŘÁK, SVATOPLUK. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.